CH 8 IDENTITE DE BEZOUT

EX 10 : (L'algorithme d'Euclide-Bézout)
C'est ;d'après M Achour Abdennebi* ;le plus important des algorithmes de l'Arithmétique.
Etant donné deux entiers a et b(b>a>0) ;le tableau ci-dessous
Suggère ce qu'il faut faire.

	1	2	3	...	i	i+1	...	n	
r	b	a	R_3=le reste de b/a	...	r_i	R_{i+1}= le reste de r_{i-1}/r_i		r_n	0
q	-	-	Q_3=le quotient de b/a	...	q_i	Q_{i-1}= le quotient de r_{i-1}/ri	...	q_n	
x	$X_1=0$	$X_2=1$	$X_3=q_3.x_2+x_1$	...	x_i	$X_{i+1}=q_{i+1}.x_i+x_{i-1}$	...	x_n	
y	$Y_1=1$	$Y_2=0$	$Y_3=q_3.y_2+y_1$	...	y_i	$Y_{i+1}=q_{i+1}.y_i+y_{i-1}$	...	y_n	

* r_n le dernier reste non nul est le pgcd de a et b .

* $a.xn - b.yn = \pm r_n$

Appliqué au cas a =2015 et b = 2007 , cet algorithme donne

r	2015	2007	8	7	1	0
q	-	-	1	250	1	7
x	0	1	1.1+0=1	250 .1+1=251	1.251+1=252	-
y	1	0	1.0+1=1	250.1+0=250	1.250+1=251	-

. Le dernier reste non nul est 1 Donc 2015^2007 = 1.
. L'identité de Bézout s'écrit : 2015x251-2007x252 =1 Donc a = (-252) et b=251

EX 11 :
Appliquons encore une fois l'algorithme d'Euclide-Bézout au cas a=323 et b=391

r	391	323	68	51	17	0
q	-	-	1	4	1	3
x	0	1	1	5	6	-
y	1	0	1	4	5	

1. Le dernier reste non nul est 17 Donc 391∧323=17
2. L'identité de Bézout s'écrit : 391X5-323X6=17 Donc a=5 et b=-6
3. En déduire une solution de 391a-323b=306
   On remarque que 306= 17x18 Donc a=5x18 et b= (-6)x18